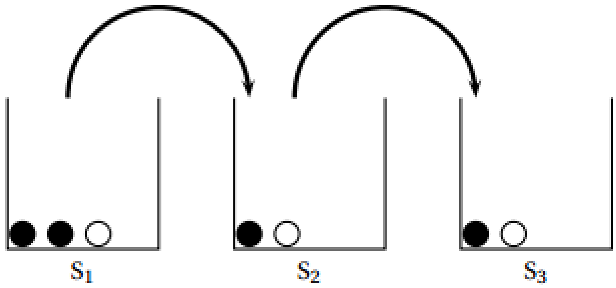
On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On imagine n sacs de jetons S_1, S_2, ..., S_n.
Au départ, le sac S_1 contient 2 jetons noirs et 1 jeton blanc, et chacun des autres sacs contient 1 jeton noir et 1 jeton blanc.
On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton de ces sacs, effectués de la façon suivante :

- Première étape : on tire au hasard un jeton de S_1,
- Deuxième étape : on place ce jeton dans S_2 et on tire, au hasard, un jeton de S_2,
- Troisième étape : après avoir placé dans S_3 le jeton sorti de S_2 on tire, au hasard, un jeton de S_3 et ... ainsi de suite, ...



Pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on note E_k l'évènement : « le jeton sorti de S_k est blanc », et $\overline{E_k}$ l'évènement contraire.

1. **a.** Déterminer la probabilité de E_1 notée $p(E_1)$ et les probabilités conditionnelles : $p(E_2/E_1)$ et $p\left(E_2/\overline{E_1}\right)$.
En déduire la probabilité de E_2 notée $p(E_2)$.

b. Pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité de E_k est notée p_k.
Justifier la relation de récurrence suivante :

$$p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}.$$

2. Étude d'une suite (u_k) :
On note (u_k) la suite définie par $u_1 = \dfrac{1}{3}$ et, pour tout entier $k \geqslant 1$,
$u_{k+1} = \dfrac{1}{3}u_k + \dfrac{1}{3}$.

a. On considère la suite (v_k) définie par, pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$ par $v_k = u_k - \dfrac{1}{2}$.
Démontrer que (v_k) est une suite géométrique,

b. En déduire l'expression de u_k en fonction de k. Montrer que la suite (u_k) est convergente et préciser sa limite,

3. Dans cette question, on suppose que $n = 10$.
Déterminer pour quelles valeurs de k on a :

$$0,4999 \leqslant p_k \leqslant 0,5.$$