

**40** ★★ Par combien de zéros se termine le nombre  $100!$  écrit dans le système décimal ?

**46** ★ 1. Écrivez la forme algébrique de  $(1 + i)^6$  en utilisant une forme exponentielle de  $1 + i$ .

2. Retrouvez ce résultat par la formule du binôme.

**47** ★ 1.  $x$  est un réel et  $n$  est un naturel non nul. Écrivez le développement de  $(1 + x)^n$ .

2. En remplaçant  $x$  par 2, calculez :

$$C_n^0 + 2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + 2^p C_n^p + \dots + 2^n C_n^n.$$

3. Déduisez de 1. que :

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^p C_n^p + \dots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

**48** ★ Résolvez dans  $\mathbb{N}$  les équations d'inconnue  $n$  :

a.  $C_n^5 = 17 C_n^4$  ;                      b.  $C_{2n+4}^{3n-1} = C_{2n+4}^n$  ;

c.  $C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 387 n$ .

**49** ★★ 1. Démontrez que pour tous naturels  $n$  et  $p$  tels que  $1 \leq p \leq n$ ,  $p C_n^p = n C_{n-1}^{p-1}$ .

2. Déduisez-en que pour tout naturel  $n \geq 1$  :

$$C_n^1 + 2 C_n^2 + 3 C_n^3 + \dots + n C_n^n = n 2^{n-1}.$$

**52** ★★ Démontrez que pour tout entier  $n \geq 0$ , le nombre

$$A = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2\sqrt{5}}$$

est un entier égal à un multiple de 5, plus  $n$ .