55.a. Pour n entier naturel, développer les puissances $(x+1)^n$ et $(x-1)^n$.

b. En déduire les sommes :

$$R = 1 + 2C_{10}^1 + 2^2C_{10}^2 + \dots + 2^kC_{10}^k + \dots + 2^{10}C_{10}^{10}$$

$$S = 1 + 3C_n^1 + 3^2C_n^2 + \dots + 3^kC_n^k + \dots + 3^nC_n^n$$

$$T = 1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^kC_n^k + \dots + (-1)^nC_n^n$$

58. Soient n et p deux entiers naturels tels que :

$$1 \leqslant p \leqslant n.$$

a. Écrire sous la forme d'une somme de deux coefficients binomiaux, les nombres :

$$C_{n+1}^{p+1},\ C_n^{p+1},\ C_{n-1}^{p+1}, \dots, C_{p+2}^{p+1}.$$

(Utiliser la formule 2 du cours.)

b. En déduire l'égalité : $C_{n+1}^{p+1} = \sum_{i=p}^{i=n} C_i^p$.

c. Traduire cette égalité par une propriété des nombres du triangle de Pascal.

57. Soient n et p deux entiers naturels tels que :

$$1 < p+1 < n.$$

1. Démontrer, par une méthode calculatoire, l'égalité :

$$C_n^p = C_{n-2}^{p-2} + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^p.$$

2. On forme un comité de p membres choisis parmi n personnes dont M^{me} A et M. B.

Quel est le nombre de comités :

a. contenant M^{me} A et M. B ?

b. ne contenant ni M^{me} A, ni M. B ?

c. contenant M^{me} A ou bien M. B ?

3. En déduire une démonstration de caractère combinatoire de l'égalité du **1**.