99 Inégalité arithmético-géométrique

Définition
Pour tout réel $x \geqslant 0$, le nombre y tel que $x = y^n$ est la racine n-ième de x ; on la note $\sqrt[n]{x}$.

Pour tous réels positifs $x_1, x_2 \ldots x_n$ et tout entier naturel n non nul,

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Cette inégalité est appelée l'inégalité arithmético-géométrique.
On se propose de démontrer de différentes façons cette inégalité dans le cas où $n = 2$, c'est-à-dire de démontrer que pour tous réels positifs a et b,

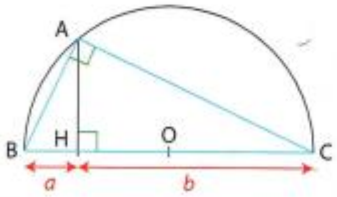
$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

1. Analytiquement
On admet que pour tous réels positifs a et b, il existe deux réels A et B tels que $e^A = a$ et $e^B = b$.
a) En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, justifier que pour tous réels A et B,

$$e^{\frac{A+B}{2}} \leqslant \frac{e^A + e^B}{2}.$$

b) Conclure.
2. Algébriquement
Développer l'expression $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$, puis en déduire l'inégalité souhaitée.

3. Géométriquement
ABC est un triangle rectangle en A, inscrit dans le demi-cercle de centre le milieu O de [BC]. H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
On note BH $= a$ et HC $= b$.



a) Exprimer la longueur AH en fonction de a et b.
b) Déterminer le maximum de la longueur AH et conclure.