69 Compléter une démonstration

f est une fonction dérivable sur un intervalle I. Dans un repère, $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative. A et B sont les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives a et b.

1. On se propose de démontrer la propriété :

> Si f est convexe sur I, alors pour tous réels a et b de I :
> $$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Recopier et compléter la démonstration ci-dessous de cette propriété.

(1) Chercher les coordonnées du milieu M du segment [AB] : M(... ; ...)

(2) Exploiter la convexité de f sur I : pour tous points A et B distincts de $\mathscr{C}$, le segment [AB] est ...

(3) Utiliser le point M′ d'abscisse $\frac{a+b}{2}$ de $\mathscr{C}$: l'ordonnée de M′ est ...

(4) Comparer les ordonnées de M et M′ : $f\left(\frac{\dots}{2}\right) \dots \frac{\dots}{2}$

(5) Conclure : rédiger une phrase de conclusion.

2. Énoncer, puis démontrer une propriété analogue lorsque la fonction f est concave sur un intervalle I.

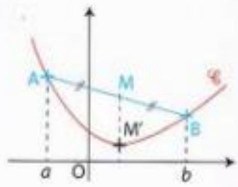
Vidéo

JAICOMPRIS.COM

Toutes les démonstrations au programme en vidéo

Liste des démonstrations :

- Si f'' est positive, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.



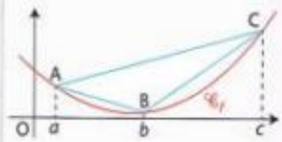
70 Comprendre une démonstration

f est une fonction convexe sur un intervalle I. $\mathscr{C}$ est sa courbe dans un repère.
On souhaite démontrer que pour tous réels a, b, c de I avec $a < b < c$:
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

1. Lire la démonstration ci-dessous et expliquer les passages en vert.

> A, B, C sont les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives a, b, c.
>
> Une équation de la sécante (AC) est $y = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}(x-a)+f(a)$.
>
> Le point B est au-dessous de (AC) donc $f(b) \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a}(b-a)+f(a)$
>
> c'est-à-dire $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$
>
> Une équation de la sécante (AC) est aussi $y = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}(x-c)+f(c)$.
>
> En utilisant le point B, on obtient aussi $\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$

2. Interpréter géométriquement les inégalités précédentes.



Commentaire
Ces inégalités sont dites « inégalités des trois pentes ».

71 Démontrer des inégalités avec la convexité

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative dans un repère de la fonction exponentielle.

a) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

b) Utiliser la convexité de la fonction exponentielle pour démontrer que pour tout réel x, $e^x > x$.