On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[2;8]$ par :

$$f(x)=\frac{-x^2+10x-16}{x^2}$$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère.

1. Montrer que pour tout réel de l'intervalle $[2;8]$, on a :

$$f'(x)=\frac{-10x+32}{x^3}$$

2. a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[2;8]$.

   b. En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[2;8]$.

3. On appelle f'' la dérivée seconde de f sur $[2;8]$.
   On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2;8]$, on a :

$$f''(x)=\frac{20x-96}{x^4}$$

   a. Montrer que f est une fonction convexe sur $[4,8;8]$.

   b. Montrer que le point de (C) d'abscisse 4,8 est un point d'inflexion.

4. On considère la fonction F définie sur $[2;8]$ par :

$$F(x)=-x+10\ln x+\frac{16}{x}$$

   a. Montrer que F est une primitive de f sur $[2;8]$.

   b. Calculer $I=\int_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x$