Langage de la continuité

Définition de la continuité :

f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un réel de I.
Dire que f est continue en a signifie que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
Dire que f est continue sur I signifie que f est continue en tout réel de I.

Continuité des fonctions usuelles :

Les fonctions polynômes, sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction racine carrée est continue sur [0; +∞[.
Les fonctions construites par opérations ou par compositions à partir des précédents sont continues sur les intervalles qui forment leur ensemble de définition, c'est le cas en particulier des fonctions rationnelles.

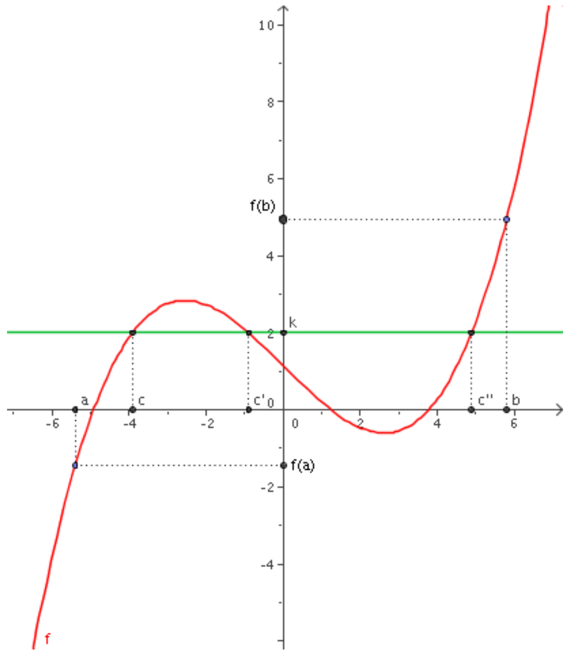
Continuité et dérivabilité :

Une fonction dérivable sur un intervalle I implique que cette fonction est continue sur cet intervalle. Mais la réciproque est fausse, une fonction continue en un point n'est pas forcement dérivable en ce point.
Exemple : La fonction racine carré est continue en 0 car $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$ or cette fonction n'est pas dérivable en 0 car $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) :

f est une fonction continue sur un intervalle I, a et b sont des réels de I.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Interprétation graphique :



Fonctions continues et strictement monotones sur [a;b] :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur [a;b], alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet **une solution unique** dans [a;b].
Dans ce cas, on dit que f est une bijection de [a;b] sur $[f(a);f(b)]$ (ou $[f(b);f(a)]$).

Théorème de la bijection :

1) f est continue
2) f est strictement monotone
3) $k\in[f(a);f(b)]$ (ou $[f(b);f(a)]$)