

**EXERCICE 1**

**5 points**

**Commun à tous les candidats**

Les cinq questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse correcte et justifiée rapporte 1 point.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère la droite  $\mathcal{D}$  dont on donne une représentation paramétrique, et le plan  $\mathcal{P}$  dont on donne une équation cartésienne :

$$\mathcal{D} \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = -5 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}: 3x + 2y - z - 5 = 0.$$

**Affirmation 1** : la droite  $\mathcal{D}$  est strictement parallèle au plan  $\mathcal{P}$ .

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère le point  $A(1; 9; 0)$  et le plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne :  $4x - y - z + 3 = 0$ .

**Affirmation 2** : la distance du point A au plan  $\mathcal{P}$  est égale à  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

3. Soit la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par :  $f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x}}$ .

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère du plan.

**Affirmation 3** : la courbe  $\mathcal{C}$  admet deux asymptotes parallèles à l'axe des abscisses.

4. Pour tout réel  $x$ , on pose  $F(x) = \int_1^x (2-t)e^{-t} dt$ .

**Affirmation 4** :  $F(x)$  est négatif ou nul quelle que soit la valeur du réel  $x$  supérieur à 1.

5. On considère l'intégrale  $I = \int_1^e t^2 \ln t dt$ .

**Affirmation 5** : la valeur exacte de l'intégrale  $I$  est :  $\frac{2e^3 + 1}{9}$ .

**EXERCICE 2**

**5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On note  $r$  la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{6}$ .

On considère le point A, d'affixe  $z_A = -\sqrt{3} + i$ , le point  $A_1$  d'affixe  $z_{A_1} = \overline{z_A}$  où  $\overline{z_A}$  désigne le conjugué de  $z_A$ .

On note enfin B image du point  $A_1$  par la rotation  $r$  et  $z_B$  l'affixe du point B.

1.
  - a. Écrire le nombre complexe  $z_A$  sous forme exponentielle, puis placer les points A et  $A_1$ , dans le repère. On prendra 2 cm comme unité graphique.
  - b. Vérifier que  $z_B = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$  sous forme exponentielle, puis écrire le nombre complexe  $z_B$  sous forme algébrique.  
Placer alors le point B dans le même repère.
2. On considère le vecteur unitaire  $\vec{w}$ , tel que  $(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\pi}{12}$ , et la droite  $\Delta$  passant par O et de vecteur directeur  $\vec{w}$ .

- a. Démontrer que le triangle OAB est rectangle isocèle en O.
  - b. Tracer la droite  $\Delta$ , puis démontrer que  $\Delta$  est la bissectrice de l'angle  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ .  
En déduire que les points A et B sont symétriques par rapport à la droite  $\Delta$ .
3. On note  $B_1$  le symétrique de B par rapport à l'axe  $(O; \vec{u})$  et  $B'$  l'image de  $B_1$  par la rotation  $r$ . Démontrer que  $B' = A$ .
4. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.*
- Soit C le point d'affixe  $\sqrt{2}(1+i)$  et D le symétrique de C par rapport à la droite  $\Delta$ .  
Construire les points C et D, puis calculer l'affixe du point D

**EXERCICE 2****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

**Partie A - Détermination d'une similitude directe**

On considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_B = -\sqrt{3} + i.$$

1.
  - a. Ecrire les nombres complexes  $z_A$  et  $z_B$  sous forme exponentielle.
  - b. Placer les points A et B dans le repère. On prendra 1 cm comme unité graphique.
2.
  - a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe  $f$  de centre 0 qui transforme le point A en B.
  - b. Préciser les éléments caractéristiques de la similitude  $f$ .

**Partie B. Étude d'une transformation**

Le but de cette partie est d'étudier la transformation  $g = s \circ f$ , où  $f$  désigne la similitude définie dans la partie A et  $s$  la réflexion d'axe  $(O; \vec{u})$ .

1. Soit  $M$  un point quelconque du plan. On désigne par  $M'$  l'image du point  $M$  par la transformation  $g$ .  
On note  $z$  et  $z'$  les affixes respectives des points  $M$  et  $M'$ , et  $\bar{z}$  celle du conjugué de  $z$ .
  - a. Démontrer l'égalité :  $z' = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}\bar{z}$ .
  - b. On pose  $C = g(A)$  et  $D = g(C)$ . Calculer les affixes respectives des points C et D, puis placer les points C et D sur la figure.
  - c. Quelle est la nature du triangle OAC ?
  - d. Démontrer que les vecteurs  $\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{OD}$  sont colinéaires.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.*  
Déterminer la nature de la transformation  $g \circ g$  et préciser ses éléments géométriques.

**EXERCICE 3****5 points****Commun à tous les candidats**

Soit  $k$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une urne contient  $k$  boules noires et 3 boules blanches. Ces  $k+3$  boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

**Partie A**

Dans la partie A, on pose  $k = 7$ .

Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note  $p$  la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ait tiré deux boules de couleurs différentes.  
Démontrer que  $p = 0,42$ .
2. Soit  $n$  un entier tel que  $n > 2$ . Un joueur joue  $n$  parties identiques et indépendantes. On note  $X$  la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et  $p_n$  la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des  $n$  parties.
  - a. Expliquer pourquoi la variable  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .
  - b. Exprimer  $p_n$  en fonction de  $n$ , puis calculer  $p_{10}$  en arrondissant au millième.
  - c. Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

**Partie B**

Dans la partie B, le nombre  $k$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un joueur joue une partie.

On note  $Y_k$  la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1.
  - a. Justifier l'égalité :  $p(Y_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$ .
  - b. Écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire  $Y_k$
2. On note  $E(Y_k)$  l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $Y_k$   
On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance  $E(Y_k)$  est strictement positive.  
Déterminer les valeurs de  $k$  pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

**EXERCICE 4****5 points****Commun à tous les candidats**

1. On considère l'algorithme suivant :

<b>Entrée</b>	Saisir un réel strictement positif non nul $a$ Saisir un réel strictement positif non nul $b$ ( $b > a$ ) Saisir un entier naturel non nul $N$
<b>Initialisation</b>	Affecter à $u$ la valeur $a$ Affecter à $v$ la valeur $b$ Affecter à $n$ la valeur 0
<b>Traitement</b>	TANTQUE $n < N$ Affecter à $n$ la valeur $n + 1$ Affecter à $u$ la valeur $\frac{a+b}{2}$ Affecter à $v$ la valeur $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ Affecter à $a$ la valeur $u$ Affecter à $b$ la valeur $v$
<b>Sortie</b>	Afficher $u$ , afficher $v$

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour  $a = 4$ ,  $b = 9$  et  $N = 2$ . Les valeurs successives de  $u$  et  $v$  seront arrondies au millième.

$n$	$a$	$b$	$u$	$v$
0	4	9		
1				
2				

Dans la suite,  $a$  et  $b$  sont deux réels tels que  $0 < a < b$ .

On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par :

$u_0 = a, v_0 = b$  et, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$$

2.
  - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n > 0$  et  $v_n > 0$ .
  - b. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  :  $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$ .  
En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n \leq v_n$ .
3.
  - a. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
  - b. Comparer  $v_{n+1}^2$  et  $v_n^2$ . En déduire le sens de variation de la suite  $(v_n)$ .
4. Démontrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes.