

**1. Exercice 4 (5 points, spécialistes)**

1. On considère l'équation (E) :  $11x - 7y = 5$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

a. Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs  $(u ; v)$  tels que  $11u - 7v = 1$ . Trouver un tel couple.

b. En déduire une solution particulière de l'équation (E).

c. Résoudre l'équation (E).

d. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère la droite (D) d'équation cartésienne  $11x - 7y - 5 = 0$ . On note C l'ensemble des points  $M(x ; y)$  du plan tels que  $0 \leq x \leq 50$  et  $0 \leq y \leq 50$ .

Déterminer le nombre de points de la droite (D) appartenant à l'ensemble C et dont les coordonnées sont des nombres entiers.

2. On considère l'équation (F) :  $11x^2 - 7y^2 = 5$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

a. Démontrer que si le couple  $(x ; y)$  est solution de (F), alors  $x^2 \equiv 2y^2 \pmod{5}$ .

b. Soient  $x$  et  $y$  des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, $x$ est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $x^2$ est congru à					

Modulo 5, $y$ est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de  $x^2$  et de  $2y^2$  par 5 ?

c. En déduire que si le couple  $(x ; y)$  est solution de (F), alors  $x$  et  $y$  sont des multiples de 5.

3. Démontrer que si  $x$  et  $y$  sont des multiples de 5, alors le couple  $(x ; y)$  n'est pas solution de (F). Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?