

EXERCICE 2 (5 points)**(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)**

1. On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs N tels que :

$$\begin{cases} N \equiv 5 & (13) \\ N \equiv 1 & (17) \end{cases} .$$

a. Vérifier que 239 est solution du système.

b. Soit N un entier relatif solution de ce système.

Démontrer que N peut s'écrire sous la forme $N = 1 + 17x = 5 + 13y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant $17x - 13y = 4$.

c. Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où x et y sont des entiers relatifs.

d. En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221k$.

e. Démontrer l'équivalence entre $N \equiv 18 \pmod{221}$ et $\begin{cases} N \equiv 5 & (13) \\ N \equiv 1 & (17) \end{cases}$.

2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

a. Existe-t-il un entier naturel k tel que $10^k \equiv 1 \pmod{17}$?

b. Existe-t-il un entier naturel ℓ tel que $10^\ell \equiv 18 \pmod{221}$?