10 Amérique du Sud novembre 2010

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $A(n) = n^4 + 1$.
L'objet de l'exercice est l'étude des diviseurs premiers de $A(n)$.

1. Quelques résultats

1. Étudier la parité de l'entier $A(n)$.
2. Montrer que, quel que soit l'entier n, $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.
3. Montrer que tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n.
4. Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$:

$$n^8 \equiv 1 \quad \text{mod } d.$$

2. Recherche de critères

Soit d un diviseur de $A(n)$. On note s le plus petit des entiers naturels non nuls k tels que $n^k \equiv 1$ mod d.

1. Soit k un tel entier. En utilisant la division euclidienne de k par s, montrer que s divise k.
2. En déduire que s est un diviseur de 8.
3. Montrer que si, de plus, d est premier, alors s est un diviseur de $d - 1$. On pourra utiliser le petit théorème de Fermat.

3. Recherche des diviseurs premiers de $A(n)$ dans le cas où n est un entier pair.

Soit p un diviseur premier de $A(n)$. En examinant successivement les cas $s = 1$, $s = 2$ puis $s = 4$, conclure que p est congru à 1 modulo 8.

4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Appliquer ce qui précède à la recherche des diviseurs premiers de $A(12)$.

Indication : la liste des nombres premiers congrus à 1 modulo 8 débute par 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137, ...