

113 Liban juin 2003

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur \mathbb{N} par :

$$\begin{aligned}x_0 &= 3 & \text{et} & & x_{n+1} &= 2x_n - 1 \\ y_0 &= 1 & \text{et} & & y_{n+1} &= 2y_n + 3.\end{aligned}$$

- 1.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $x_n = 2^{n+1} + 1$.
- 2.**
 - 1.** Calculer le pgcd de x_8 et x_9 , puis celui de x_{2002} et x_{2003} . Que peut-on en déduire pour x_8 et x_9 d'une part, pour x_{2002} et x_{2003} d'autre part ?
 - 2.** x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?
- 3.**
 - 1.** Démontrer que pour tout entier naturel n , $2x_n - y_n = 5$.
 - 2.** Exprimer y_n en fonction de n .
 - 3.** En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.
 - 4.** On note d_n le pgcd de x_n et y_n pour tout entier naturel n .
Démontrer que l'on a $d_n = 1$ ou $d_n = 5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.