

## 120 Amérique du Nord juin 2002

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme  $\overline{abba}$  où  $a$  est un chiffre supérieur ou égal à 2 et  $b$  est un chiffre quelconque.

Exemples d'éléments de (E) : 2 002 ; 3 773 ; 9 119.

Les parties A et B peuvent être traitées séparément.

### Partie A : Nombre d'éléments de (E) ayant 11 comme plus petit facteur premier.

1. 1. Décomposer 1 001 en produit de facteurs premiers.  
2. Montrer que tout élément de (E) est divisible par 11.
2. 1. Quel est le nombre d'éléments de (E) ?  
2. Quel est le nombre d'éléments de (E) qui ne sont ni divisibles par 2 ni par 5 ?
3. Soit  $n$  un élément de (E) s'écrivant sous la forme  $\overline{abba}$ .
  1. Montrer que : «  $n$  est divisible par 3 » équivaut à «  $a + b$  est divisible par 3 ».
  2. Montrer que : «  $n$  est divisible par 7 » équivaut à «  $b$  est divisible par 7 ».
4. Dédire des questions précédentes le nombre d'éléments de (E) qui admettent 11 comme plus petit facteur premier.

### Partie B : Étude des éléments de (E) correspondant à une année bissextile.

Soit (F) l'ensemble des éléments de (E) qui correspondent à une année bissextile.

On admet que pour tout élément  $n$  de (F), il existe des entiers naturels  $p$  et  $q$  tels que :

$$n = 2000 + 4p \quad \text{et} \quad n = 2002 + 11q.$$

1. On considère l'équation (e) :  $4p - 11q = 2$  où  $p$  et  $q$  sont des entiers relatifs.  
Vérifier que le couple (6, 2) est solution de l'équation (e) puis résoudre l'équation (e).
2. En déduire que tout entier  $n$  de (F) peut s'écrire sous la forme  $2024 + 44k$  où  $k$  est un entier relatif.
3. À l'aide de la calculatrice déterminer les six plus petits éléments de (F).  
N.B. : Liste des nombres premiers inférieurs à 40 :  
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37.