

PARTIE A - Restitution organisée de connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de BÉZOUT et le théorème de GAUSS.

Théorème de BÉZOUT :

Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple $(u ; v)$ d'entiers relatifs vérifiant $au + bv = 1$.

Théorème de GAUSS :

Soient a, b, c des entiers relatifs.

Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c .

1. En utilisant le théorème de BÉZOUT, démontrer le théorème de GAUSS.
2. Soient p et q deux entiers naturels tels que p et q sont premiers entre eux.
Déduire du théorème de GAUSS que, si a est un entier relatif, tel que $a \equiv 0 \pmod{p}$ et $a \equiv 0 \pmod{q}$, alors $a \equiv 0 \pmod{pq}$.

PARTIE B

On se propose de déterminer l'ensemble \mathcal{S} des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 9 \pmod{17} \\ n \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

1. Recherche d'un élément de \mathcal{S} .

On désigne par $(u ; v)$ un couple d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$.

1. Justifier l'existence d'un tel couple $(u ; v)$.
2. On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$.
Démontrer que n_0 appartient à \mathcal{S} .
3. Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à \mathcal{S} .

2. Caractérisation des éléments de \mathcal{S} .

1. Soit n un entier relatif appartenant à \mathcal{S} .
Démontrer que $n - n_0 \equiv 0 \pmod{85}$.
2. En déduire qu'un entier relatif n appartient à \mathcal{S} si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $n = 43 + 85k$ où k est un entier relatif.

3. Application

Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons.

Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9.

Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.

Combien a-t-elle de jetons ?