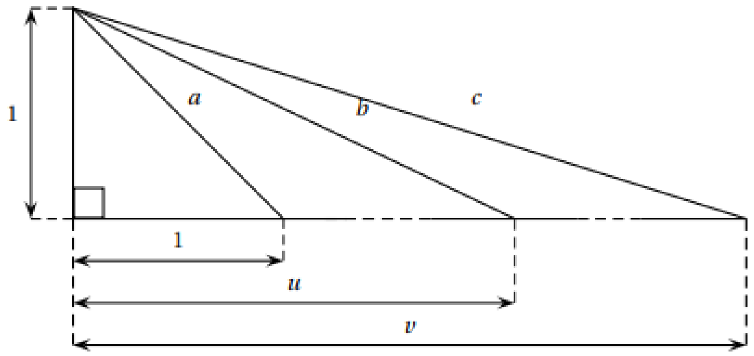
On s'intéresse à la figure suivante, dans laquelle a, b et c désignent les longueurs des hypoténuses des trois triangles rectangles en O dessinés ci-dessous.



Problème : on cherche les couples de **nombres entiers naturels non nuls** $(u,\ v)$ tels que $ab = c$.

1. Modélisation
   Démontrer que les solutions du problème sont des solutions de l'équation :

$$(E) :\quad v^2 - 2u^2 = 1 \quad (v \text{ et } u \text{ étant des entiers naturels non nuls}).$$

2. Recherche systématique de solutions de l'équation (E)
   Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche au cours de son exécution tous les couples solutions de l'équation pour lesquels $1 \leqslant u \leqslant 1000$ et $1 \leqslant v \leqslant 1000$.

Pour u allant de 1 à … faire	Au cours de son exécution,
Pour …	l'algorithme affiche :
Si …	2 3
Afficher u et v	12 17
Fin Si	70 99
Fin Pour	408 577
Fin Pour	

3. Analyse des solutions éventuelles de l'équation (E)
   On suppose que le couple $(u,\ v)$ est une solution de l'équation (E).
   a. Établir que $u < v$.
   b. Démontrer que n et n^2 ont la même parité pour tout entier naturel n.
   c. Démontrer que v est un nombre impair.
   d. Établir que $2u^2 = (v-1)(v+1)$.
   En déduire que u est un nombre pair.

4. Une famille de solutions
   On assimile un couple de nombres entiers $(u,\ v)$ à la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

   On définit également la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que si une matrice colonne X est une solution de l'équation (E), alors AX est aussi une solution de l'équation (E).

b. Démontrer que si une matrice colonne X est une solution de l'équation (E), alors pour tout entier naturel n, $A^n X$ est aussi une solution de l'équation (E).

c. À l'aide de la calculatrice, donner un couple $(u,\ v)$ solution de l'équation (E) tel que $v > 10000$.