Pour tout entier naturel n non nul, on appelle $S(n)$ le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n.

1. Vérifier que $S(6) = 12$ et calculer $S(7)$.

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $S(n) \geqslant 1 + n$.

b. Quels sont les entiers naturels n tels que $S(n) = 1 + n$?

3. On suppose dans cette question que n s'écrit $p \times q$ où p et q sont des nombres premiers distincts.

a. Démontrer que $S(n) = (1 + p)(1 + q)$.

b. On considère la proposition suivante :
« Pour tous entiers naturels n et m non nuls distincts,
$S(n \times m) = S(n) \times S(m)$ ».
Cette proposition est-elle vraie ou fausse? Justifier.

4. On suppose dans cette question que l'entier n s'écrit p^k, où p est un nombre premier et k un nombre entier naturel non nul.

a. Quels sont les diviseurs de n?

b. En déduire que $S(n) = \dfrac{1 - p^{k+1}}{1 - p}$.

5. On suppose dans cette question que n s'écrit $p^{13} \times q^7$, où p et q sont des nombres premiers distincts.

a. Soit m un entier naturel.
Démontrer que m divise n si, et seulement si, il existe deux nombres entiers s et t avec $0 \leqslant s \leqslant 13$ et $0 \leqslant t \leqslant 7$ tels que $m = p^s \times q^t$.

b. Démontrer que $S(n) = \dfrac{1 - p^{14}}{1 - p} \times \dfrac{1 - q^8}{1 - q}$.*