

Les entiers naturels 1, 11, 111, 1 111, ... sont des rep-units. On appelle ainsi les entiers naturels ne s'écrivant qu'avec des 1.

Pour tout entier naturel p non nul, on note N_p le rep-unit s'écrivant avec p fois le chiffre 1 :

$$N_p = \underbrace{11\dots 1}_{\substack{p \text{ répétitions} \\ \text{du chiffre 1}}} = \sum_{k=0}^{p-1} 10^k.$$

Dans tout l'exercice, p désigne un entier naturel non nul.

L'objet de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des rep-units.

Partie A : divisibilité des rep-units dans quelques cas particuliers

1. Montrer que N_p n'est divisible ni par 2 ni par 5.
2. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 3.
 - a. Prouver que, pour tout entier naturel j , $10^j \equiv 1 \pmod{3}$.
 - b. En déduire que $N_p \equiv p \pmod{3}$.
 - c. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le rep-unit N_p soit divisible par 3.
3. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 7.
 - a. Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous, où a est l'unique entier relatif appartenant à $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ tel que $10^m \equiv a \pmod{7}$.

On ne demande pas de justification.

m	0	1	2	3	4	5	6
a							

- b. Soit p un entier naturel non nul.
Montrer que $10^p \equiv 1 \pmod{7}$ si et seulement si p est un multiple de 6.
On pourra utiliser la division euclidienne de p par 6.

- c. Justifier que, pour tout entier naturel p non nul, $N_p = \frac{10^p - 1}{9}$.
- d. Démontrer que « 7 divise N_p » est équivalent à « 7 divise $9N_p$ ».
- e. En déduire que N_p est divisible par 7 si et seulement si p est un multiple de 6.

Partie B : un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1, c'est-à-dire $n^2 \equiv 1 \pmod{10}$.

- a. Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous.

$n \equiv \dots \pmod{10}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv \dots \pmod{10}$										

- b. En déduire qu'il existe un entier naturel m tel que : $n = 10m + 1$ ou $n = 10m - 1$.
- c. Conclure que $n^2 \equiv 1 \pmod{20}$.
2. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Quel est le reste de la division euclidienne de N_p par 20?
3. En déduire que, pour p entier naturel supérieur ou égal à 2, le rep-unit N_p n'est pas le carré d'un entier.