TS **ARITHMETIQUE** feuille 85a

Pour tout couple d'entiers relatifs non nuls (a, b), on note $\text{pgcd}(a, b)$ le plus grand diviseur commun de a et b.
Le plan est muni d'un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Exemple. Soit Δ_1 la droite d'équation $y = \frac{5}{4}x - \frac{2}{3}$.

a. Montrer que si (x, y) est un couple d'entiers relatifs alors l'entier $15x - 12y$ est divisible par 3.

b. Existe-il au moins un point de la droite Δ_1 dont les coordonnées sont deux entiers relatifs ? Justifier.

Généralisation

On considère désormais une droite Δ d'équation $(E) : y = \frac{m}{n}x - \frac{p}{q}$ où m, n, p et q sont des entiers relatifs non nuls tels que $\text{pgcd}(m, n) = \text{pgcd}(p, q) = 1$.
Ainsi, les coefficients de l'équation (E) sont des fractions irréductibles et on dit que Δ est une droite rationnelle.
Le but de l'exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m, n, p et q pour qu'une droite rationnelle Δ comporte au moins un point dont les coordonnées sont deux entiers relatifs.

2. On suppose ici que la droite Δ comporte un point de coordonnées $\left(x_0, y_0\right)$ où x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.

a. En remarquant que le nombre $ny_0 - mx_0$ est un entier relatif, démontrer que q divise le produit np.

b. En déduire que q divise n.

3. Réciproquement, on suppose que q divise n, et on souhaite trouver un couple $\left(x_0, y_0\right)$ d'entiers relatifs tels que $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$.

a. On pose $n = qr$, où r est un entier relatif non nul. Démontrer qu'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels que $qru - mv = 1$.

b. En déduire qu'il existe un couple $\left(x_0, y_0\right)$ d'entiers relatifs tels que $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$.

4. Soit Δ la droite d'équation $y = \frac{3}{8}x - \frac{7}{4}$. Cette droite possède-t-elle un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs ? Justifier.

5. On donne l'algorithme suivant :

Variables :	M, N, P, Q : entiers relatifs non nuls, tels que $\text{pgcd}(M, N) = \text{pgcd}(P, Q) = 1$ X : entier naturel
Entrées :	Saisir les valeurs de M, N, P, Q

Traitement et sorties :	Si Q divise N alors
	  X prend la valeur 0
	  Tant que $\left(\dfrac{M}{N}X - \dfrac{P}{Q}\text{ n'est pas entier}\right)$
	  et $\left(-\dfrac{M}{N}X - \dfrac{P}{Q}\text{ n'est pas entier}\right)$ faire
	    X prend la valeur $X + 1$
	  Fin tant que
	  Si $\dfrac{M}{N}X - \dfrac{P}{Q}$ est entier alors
	    Afficher $X, \dfrac{M}{N}X - \dfrac{P}{Q}$
	  Sinon
	    Afficher $-X, -\dfrac{M}{N}X - \dfrac{P}{Q}$
	  Fin Si
	Sinon
	  Afficher « Pas de solution »
	Fin Si

a. Justifier que cet algorithme se termine pour toute entrée de M, N, P, Q, entiers relatifs non nuls tels que $\text{pgcd}(M, N) = \text{pgcd}(P, Q) = 1$.

b. Que permet-il d'obtenir ?