Pour tout couple d'entiers relatifs non nuls (a, b), on note pgcd(a, b) le plus grand diviseur commun de a et b.

Le plan est muni d'un repère $(0, \vec{t}, \vec{j})$.

- 1. Exemple. Soit Δ_1 la droite d'équation $y = \frac{5}{4}x \frac{2}{3}$.
 - **a.** Montrer que si (x, y) est un couple d'entiers relatifs alors l'entier 15x-12y est divisible par 3.
 - b. Existe-il au moins un point de la droite Δ₁ dont les coordonnées sont deux entiers relatifs? Justifier.

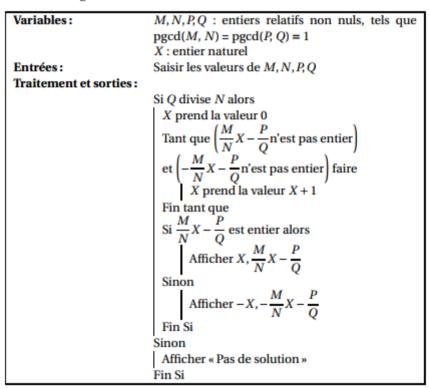
Généralisation

On considère désormais une droite Δ d'équation (E): $y = \frac{m}{n}x - \frac{p}{q}$ où m, n, p et q sont des entiers relatifs non nuls tels que $\operatorname{pgcd}(m, n) = \operatorname{pgcd}(p, q) = 1$. Ainsi, les coefficients de l'équation (E) sont des fractions irréductibles et on dit que Δ est une droite rationnelle.

Le but de l'exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m,n,p et q pour qu'une droite rationnelle Δ comporte au moins un point dont les coordonnées sont deux entiers relatifs.

- **2.** On suppose ici que la droite Δ comporte un point de coordonnées (x_0, y_0) où x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.
 - a. En remarquant que le nombre ny₀ mx₀ est un entier relatif, démontrer que q divise le produit np.
 - **b.** En déduire que q divise n.
- 3. Réciproquement, on suppose que q divise n, et on souhaite trouver un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels que $y_0 = \frac{m}{n}x_0 \frac{p}{q}$.
 - **a.** On pose n = qr, où r est un entier relatif non nul. Démontrer qu'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels que qru mv = 1.
 - **b.** En déduire qu'il existe un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels que $y_0 = \frac{m}{n}x_0 \frac{p}{a}$.
- **4.** Soit Δ la droite d'équation $y = \frac{3}{8}x \frac{7}{4}$. Cette droite possède-t-elle un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs? Justifier.

5. On donne l'algorithme suivant :



- **a.** Justifier que cet algorithme se termine pour toute entrée de M, N, P, Q, entiers relatifs non nuls tels que pgcd(M, N) = pgcd(P, Q) = 1.
- b. Que permet-il d'obtenir?