Partie A

Le but de celle partie est de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini en raisonnant par l'absurde.

1. On suppose qu'il existe un nombre fini de nombres premiers notés $p_1, p_2, \dots, p_n$.
   On considère le nombre E produit de tous les nombres premiers augmenté de 1 :
   $$E = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1.$$
   Démontrer que E est un entier supérieur ou égal à 2, et que E est premier avec chacun des nombres $p_1, p_2, \dots, p_n$.
2. En utilisant le fait que E admet un diviseur premier conclure.

Partie B

Pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, on pose $M_k = 2^k - 1$.
On dit que M_k est le k-ième nombre de Mersenne.

1. **a.** Reproduire et compléter le tableau suivant, qui donne quelques valeurs de M_k :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k	3								

   b. D'après le tableau précédent, si k est un nombre premier, peut-on conjecturer que le nombre M_k est premier ?
2. Soient p et q deux entiers naturels non nuls.
   a. Justifier l'égalité : $1 + 2^p + + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \cdots (2^p)^{q-1} = \dfrac{(2^p)^q - 1}{2^p - 1}$.
   b. En déduire que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$.
   c. En déduire que si un entier k supérieur ou égal à 2 n'est pas premier, alors M_k ne l'est pas non plus.
3. **a.** Prouver que le nombre de Mersenne M_{11} n'est pas premier.
   b. Que peut-on en déduire concernant la conjecture de la question 1. b. ?

Partie C

Le test de Lucas-Lehmer permet de déterminer si un nombre de Mersenne donné est premier. Ce test utilise la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2.$$

Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, le test permet d'affirmer que le nombre M_n est premier si et seulement si $u_{n-2} \equiv 0 \quad \text{modulo} \quad M_n$. Cette propriété est admise dans la suite.

1. Utiliser le test de Lucas-Lehmer pour vérifier que le nombre de Mersenne M_5 est premier
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
   L'algorithme suivant, qui est incomplet, doit permettre de vérifier si le nombre de Mersenne M_n est premier, en utilisant le test de Lucas-Lehmer.

Variables :	u, M, n et i sont des entiers naturels
Initialisation :	u prend la valeur 4
Traitement :	Demander un entier $n \geqslant 3$
	M prend la valeur ……
	Pour i allant de 1 à … faire
	u prend la valeur …
	Fin Pour
	Si M divise u alors afficher « M ……… »
	sinon afficher « M ……… »

   Recopier et compléter cet algorithme de façon à ce qu'il remplisse la condition voulue.