

On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :

« Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre 1 peuvent-ils être premiers? »

Pour tout entier naturel $p \geq 2$, on pose $N_p = 1 \dots 1$ où 1 apparaît p fois.

On rappelle dès lors que $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \dots + 10^0$.

1. Les nombres $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, $N_4 = 1111$ sont-ils premiers?
2. Prouver que $N_p = \frac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9?
3. On se propose de démontrer que si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier.

On rappelle que pour tout nombre réel x et tout entier naturel n non nul,

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1).$$

- a. On suppose que p est pair et on pose $p = 2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
Montrer que N_p est divisible par $N_2 = 11$.
 - b. On suppose que p est multiple de 3 et on pose $p = 3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
Montrer que N_p est divisible par $N_3 = 111$.
 - c. On suppose p non premier et on pose $p = kq$ où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1.
En déduire que N_p est divisible par N_k .
4. énoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier.
Cette condition est-elle suffisante?