Enseignement de spécialité

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
Si p est un nombre premier et a est un entier naturel non divisible par p, alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 10u_n + 21.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

   b. En déduire, pour tout entier naturel n, l' écriture décimale de u_n.
3. Montrer que u_2 est un nombre premier.

   On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) par certains nombres premiers.
4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.
5. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3u_n \equiv 4-(-1)^n \pmod{11}$.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible par 11.
6. **a.** Démontrer l'égalité : $10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel k, u_{16k+8} est divisible par 17.