

1. On considère l'ensemble $A_7 = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
 1. Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau figurant en annexe 2 l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1 \pmod{7}$.
 2. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5 \pmod{7}$ équivaut à $x \equiv 4 \pmod{7}$.
 3. Si a est un élément de A_7 , montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0 \pmod{7}$ sont les multiples de 7.
2. Dans toute cette question, p est un nombre premier supérieur ou égal à 3. On considère l'ensemble $A_p = \{1 ; 2 ; \dots ; p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p . Soit a un élément de A_p .
 1. Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1 \pmod{p}$.
 2. On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p . Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p , de l'équation $ax \equiv 1 \pmod{p}$.
 3. Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $xy \equiv 0 \pmod{p}$ si et seulement si x est un multiple de p où y est un multiple de p .
 4. Application : $p = 31$. Résoudre dans A_{31} les équations : $2x \equiv 1 \pmod{31}$ et $3x \equiv 1 \pmod{31}$.
À l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \pmod{31}$.