On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :
« *Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre* 1 *peuvent-ils être premiers* ? »
Pour tout entier naturel $p \geqslant 2$, on pose $N_p = 1\ldots1$ où 1 apparaît $p$ fois.
On rappelle dès lors que $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \cdots + 10^0$.

**1.** Les nombres $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, $N_4 = 1111$ sont-ils premiers ?

**2.** Prouver que $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9 ?

**3.** On se propose de démontrer que si $p$ n'est pas premier, alors $N_p$ n'est pas premier.
On rappelle que pour tout nombre réel $x$ et tout entier naturel $n$ non nul,

$$x^n - 1 = (x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1\right).$$

1. On suppose que $p$ est pair et on pose $p = 2q$, où $q$ est un entier naturel plus grand que 1.
   Montrer que $N_p$ est divisible par $N_2 = 11$.
2. On suppose que $p$ est multiple de 3 et on pose $p = 3q$, où $q$ est un entier naturel plus grand que 1.
   Montrer que $N_p$ est divisible par $N_3 = 111$.
3. On suppose $p$ non premier et on pose $p = kq$ où $k$ et $q$ sont des entiers naturels plus grands que 1.
   En déduire que $N_p$ est divisible par $N_k$.

**4.** Énoncer une condition nécessaire pour que $N_p$ soit premier.
Cette condition est-elle suffisante ?