Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle x :

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0.$$

où u et v sont des entiers relatifs.

1. On suppose dans cette question que $\dfrac{14}{39}$ est solution de l'équation (1).

1. Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation $14u + 39v = 1\,129$.
2. Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14x + 39y = 1$.
   Vérifier que le couple $(-25\ ;\ 9)$ est solution de cette équation.
3. En déduire un couple $(u_0\ ;\ v_0)$ solution particulière de l'équation $14u + 39v = 1\,129$.
   Donner la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.
4. Déterminer, parmi les couples $(u\ ;\ v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.

2.

1. Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers.
   En déduire, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.
2. Soit $\dfrac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue x :
   $$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0 \quad \text{où} \quad u \quad \text{et} \quad v \quad \text{sont des entiers relatifs.}$$
   Montrer que si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors P divise 14 et Q divise 78.
3. En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.