

- 1.** 1. Calculer : $(1 + \sqrt{6})^2$, $(1 + \sqrt{6})^4$, $(1 + \sqrt{6})^6$.
2. Appliquer l'algorithme d'Euclide à 847 et 342. Que peut-on en déduire ?
2. Soit n un entier naturel non nul. On note a et b les entiers naturels tels que :

$$(1 + \sqrt{6})^n = a_n + b_n \sqrt{6}.$$

Que valent a_1 et b_1 ?

D'après les calculs de la question **1 a**, donner d'autres valeurs de a_n et b_n .

1. Calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
2. Démontrer que, si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1} + b_{n+1}$.
En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.
3. Démontrer que, si a_n et b_n sont premiers entre eux, alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux.
En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, a_n et b_n sont premiers entre eux.