

**1. Exercice 3 (5 points, spécialistes)**

---

**Partie A : Restitution organisée de connaissances**

Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

**Partie B**

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

« Si  $p$  est un nombre premier et  $q$  un entier naturel premier avec  $p$ , alors  $q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  ».

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par :  $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ .

1. Calculer les six premiers termes de la suite.
2. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n$  est pair.
3. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  pair non nul,  $u_n$  est divisible par 4.

On note (E) l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite  $(u_n)$ .

4. Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble (E) ?
5. Soit  $p$  un nombre premier strictement supérieur à 3.
  - a. Montrer que  $6 \times 2^{p-2} \equiv 3[p]$  et  $6 \times 3^{p-2} \equiv 2[p]$ .
  - b. En déduire que  $6 \times u_{p-2} \equiv 0[p]$ .
  - c. Le nombre  $p$  appartient-il à l'ensemble (E) ?