122 Asie juin 2002

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 8$ et

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} & = & \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{array}\right. , \ n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer, par récurrence, que les points M_n de coordonnées $(x_n,\ y_n)$ sont sur la droite (Δ) dont une équation est $5x - y + 3 = 0$. En déduire que $x_{n+1} = 4x_n + 2$.

2. Montrer, par récurrence, que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduire que tous les y_n sont aussi des entiers naturels.

3. Montrer que :

   1. x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.

   2. Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.

4. **1.** Montrer, par récurrence, que $x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$.

   2. En déduire que $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3, pour tout entier naturel n.