123 Centres étrangers juin 2002

Soit p un nombre premier donné. On se propose d'étudier l'existence de couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation :

$$\mathbf{E}\ : x^2 + y^2 = p^2$$

1. On pose $p = 2$. Montrer que l'équation **E** est sans solution.
On suppose désormais $p \geqslant 2$ et que le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de l'équation **E**.

2. Le but de cette question est de prouver que x et y sont premiers entre eux.

1. Montrer que x et y sont de parités différentes.
2. Montrer que x et y ne sont pas divisibles par p.
3. En déduire que x et y sont premiers entre eux.

3. On suppose maintenant que p est une somme de deux carrés non nuls, c'est-à-dire : $p = u^2 + v^2$ où u et v sont deux entiers naturels strictement positifs.

1. Vérifier qu'alors le couple $\left(\left|u^2 - v^2\right|\ ;\ 2uv\right)$ est solution de l'équation **E**.
2. Donner une solution de l'équation **E**, lorsque $p = 5$ puis lorsque $p = 13$.

4. On se propose enfin de vérifier sur deux exemples, que l'équation **E** est impossible lorsque p n'est pas somme de deux carrés.

1. $p = 3$ et $p = 7$ sont-ils somme de deux carrés ?
2. Démontrer que les équations $x^2 + y^2 = 9$ et $x^2 + y^2 = 49$ n'admettent pas de solution en entiers naturels strictement positifs.