

128 Nouvelle-Calédonie décembre 2001**Partie I**

Soit x un nombre réel.

1. Montrer que $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$.
2. En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients réels.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$ et d leur PGCD.

1. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.
2. Montrer que, tout diviseur de A qui divise n , divise 2.
3. Montrer que, tout diviseur commun de A et B , divise $4n$.
4. Dans cette question on suppose que n est impair.
 1. Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.
 2. Montrer que d divise n .
 3. En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.
5. On suppose maintenant que n est pair.
 1. Montrer que 4 ne divise pas $n^2 - 2n + 2$.
 2. Montrer que d est de la forme $d = 2p$, où p est impair.
 3. Montrer que p divise n . En déduire que $d = 2$. (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question 4.)