140 Pondichéry juin 2001

1. On considère l'équation (1) d'inconnue $(n,\ m)$ élément de $\mathbb{Z}^2$:

$$11n - 24m = 1.$$

1. Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.
2. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).
3. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2. recherche du P.G.C.D. de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

1. Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.
2. $(n,\ m)$ désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire

$$\left(10^{11n} - 1\right) - 10\left(10^{24m} - 1\right) = 9.$$

3. Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$.
   (on rappelle l'égalité $a^n - 1 = (a-1)\left(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^0\right)$, valable pour tout entier naturel n non nul).
   Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :

$$\left(10^{11} - 1\right)N - \left(10^{24} - 1\right)M = 9.$$

4. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.
5. Déduire des questions précédentes le P.G.C.D. de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.