

## 159 Amérique du Nord juin 1999

Les trois parties I, II, III peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

### Partie I

Soit  $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$ .

Déterminer les paires  $\{a ; b\}$  d'entiers distincts de  $E$  tels que le reste de la division euclidienne de  $ab$  par 11 soit 1.

### Partie II

1. Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 3.
2. L'entier  $(n - 1)! + 1$  est-il pair ?
3. L'entier  $(n - 1)! + 1$  est-il divisible par un entier naturel pair ?
4. Prouver que l'entier  $(15 - 1)! + 1$  n'est pas divisible par 15.
5. L'entier  $(11 - 1)! + 1$  est-il divisible par 11 ?

### Partie III

Soit  $p$  un entier naturel non premier ( $p \geq 2$ ).

1. Prouver que  $p$  admet un diviseur  $q$  ( $1 < q < p$ ) qui divise  $(p - 1)$ .
2. L'entier  $q$  divise-t-il l'entier  $(p - 1)! + 1$  ?
3. L'entier  $p$  divise-t-il l'entier  $(p - 1)! + 1$  ?