

1. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

1. On considère l'équation (E) : $11x - 7y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

a. Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u ; v)$ tels que $11u - 7v = 1$. Trouver un tel couple.

b. En déduire une solution particulière de l'équation (E).

c. Résoudre l'équation (E).

d. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite (D) d'équation cartésienne $11x - 7y - 5 = 0$. On note C l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan tels que $0 \leq x \leq 50$ et $0 \leq y \leq 50$.

Déterminer le nombre de points de la droite (D) appartenant à l'ensemble C et dont les coordonnées sont des nombres entiers.

2. On considère l'équation (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Démontrer que si le couple $(x ; y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod{5}$.

b. Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?

c. En déduire que si le couple $(x ; y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.

3. Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x ; y)$ n'est pas solution de (F). Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?