Pour tout entier naturel n , on note F_n le n-ième nombre de Fermat. Il est défini par

$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$

Partie A :

Pierre de Fermat, leur inventeur, a conjecturé que :

« Tous les nombres de Fermat sont premiers »,

L'objectif est de tester cette conjecture.

1. **a.** Calculer F_0, F_1, F_2 et F_3.
   b. Peut-on en déduire que tous les nombres de Fermat sont premiers?
2. On considère l'algorithme ci-dessous :

```
F ← 2^(2^5) + 1
N ← 2
Tant que F%N ≠ 0
    N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

$F\%N$ désigne le reste de la division euclidienne de F par N.

La valeur affichée à la fin de l'exécution est 641.
Que peut-on en déduire?

Partie B :

L'objectif est de prouver que deux nombres de Fermat distincts sont toujours premiers entre eux.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a $F_n = (F_{n-1} - 1)^2 + 1$.
2. Pour tout entier naturel n on note :

$$\prod_{i=0}^{n} F_i = F_0 \times F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_{n-1} \times F_n.$$

On a donc $\prod_{i=0}^{n} F_i = \left(\prod_{i=0}^{n-1}\right) \times F_n$.
Montrer par récurrence et en utilisant le résultat de la question précédente que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\prod_{i=0}^{n-1} F_i = F_n - 2.$$

3. Justifier que, pour tous entiers naturels n et m tels que $n > m$, il existe un entier naturel q tel que $F_n - qF_m = 2$.
4. En déduire que deux nombres de Fermat sont toujours premiers entre eux.