

153 Pondichéry juin 2000

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1.
 1. Pour $1 \leq n \leq 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.
 2. Démontrer que, pour tout n , $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.
En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.
 3. À l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.
 4. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?
 5. En déduire que, pour tout entier naturel n , 3^n est premier avec 7.
2. Soit $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \sum_{i=0}^{i=n-1} 3^i$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
 1. Montrer que si U_n est divisible par 7, alors $3^n - 1$ est divisible par 7.
 2. Réciproquement, montrer que si $3^n - 1$ est divisible par 7, alors U_n est divisible par 7. En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisible par 7.