66 Amérique du Sud novembre 2006

Rappel : Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b \mod 7$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$.

1. *Cette question constitue une restitution organisée de connaissances*

   1. Soient a, b, c et d des entiers relatifs. Démontrer que : si $a \equiv b \mod 7$ et $c \equiv d \mod 7$ alors $ac \equiv bd \mod 7$.

   2. En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls si $a \equiv b \mod 7$ alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n \mod 7$.

2. Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \mod 7$.

3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.

   1. Montrer que : $a^6 \equiv 1 \mod 7$.

   2. On appelle *ordre* de $a \mod 7$, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \mod 7$. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \mod 7$. En déduire que k divise 6. Quelles sont les valeurs possibles de k ?

   3. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

4. À tout entier naturel n, on associe le nombre

$$A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n.$$

Montrer que $A_{2006} \equiv 6 \mod 7$.