EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1) Montrer que, pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x-1)(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1})=x^k-1.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2) **a)** Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n=dk$. Montrer que a^d-1 est un diviseur de a^n-1.

b) Déduire de la question précédente que $2^{2004}-1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3) Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur pgcd.

a) On définit m' et n' par $m=dm'$ et $n=dn'$. En appliquant le théorème de Bézout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que : $mu-nv=d$.

b) On suppose u et v strictement positifs. Montrer que : $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d=a^d-1$. Montrer ensuite que a^d-1 est le pgcd de $a^{mu}-1$ et de $a^{nv}-1$.

c) Calculer, en utilisant le résultat précédent, le pgcd de $2^{63}-1$ et $2^{60}-1$.