

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Question de cours

- 1) Enoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
- 2) Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans \mathbb{Z} le système $(S) \begin{cases} n \equiv 13 & (19) \\ n \equiv 6 & (12) \end{cases}$.

- 1) Démontrer qu'il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que : $19u + 12v = 1$.
(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).

Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S) .

- 2) a) Soit n_0 une solution de (S) , vérifier que le système (S) équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0 & (19) \\ n \equiv n_0 & (12) \end{cases}$.

b) Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0 & (19) \\ n \equiv n_0 & (12) \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0 \pmod{12 \times 19}$.

- 3) a) Trouver un couple (u, v) solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2)b).

- 4) Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.

On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?