

**Exercice 4 (5 points)**

Soit  $A$  l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle  $[1, 46]$ .

1. On considère l'équation  $(E) : 23x + 47y = 1$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.
  - a. Donner une solution particulière  $(x_0, y_0)$  de  $(E)$ .
  - b. Déterminer l'ensemble des couples  $(x, y)$  solutions de  $(E)$ .
  - c. En déduire qu'il existe un unique entier  $x$  appartenant à  $A$  tel que  $23x \equiv 1 \pmod{47}$ .

2. Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs.

- a. Montrer que si  $ab \equiv 0 \pmod{47}$  alors  $a \equiv 0 \pmod{47}$  ou  $b \equiv 0 \pmod{47}$ .
- b. En déduire que si  $a^2 \equiv 1 \pmod{47}$  alors  $a \equiv 1 \pmod{47}$  ou  $a \equiv -1 \pmod{47}$ .

3. a. Montrer que pour tout entier  $p$  de  $A$ , il existe un entier relatif  $q$  tel que  $p \times q \equiv 1 \pmod{47}$ .

Pour la suite, on admet que pour tout entier  $p$  de  $A$ , il existe un unique entier, noté  $inv(p)$ , appartenant à  $A$  tel que  $p \times inv(p) \equiv 1 \pmod{47}$ .

Par exemple :

$inv(1) = 1$  car  $1 \times 1 \equiv 1 \pmod{47}$ ,  $inv(2) = 24$  car  $2 \times 24 \equiv 1 \pmod{47}$ ,  $inv(3) = 16$  car  $3 \times 16 \equiv 1 \pmod{47}$  ...

- b. Quels sont les entiers  $p$  de  $A$  qui vérifient  $p = inv(p)$  ?
- c. Montrer que  $46! \equiv -1 \pmod{47}$ .