

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité.

Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul.

1) On considère l'équation notée (E) :

$$3x + 7y = 10^{2n} \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

a) Déterminer un couple $(u ; v)$ d'entiers relatifs tels que $3u + 7v = 1$.

En déduire une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de l'équation (E) .

b) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ solutions de (E) .

2) On considère l'équation notée (G) :

$$3x^2 + 7y^2 = 10^{2n} \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

a) Montrer que $100 \equiv 2 \pmod{7}$.

Démontrer que si $(x ; y)$ est solution de (G) alors $3x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$.

b) Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7.	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7.							

c) Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.

En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.