

EXERCICE 4 (5 points)**(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)**

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009 \pmod{10000}$.

Partie A

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16.
2. En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{16}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = 2009^2 - 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1.$$

1. **a.** Démontrer que u_0 est divisible par 5.
b. Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = u_n[u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)].$$

- c.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n est divisible par 5^{n+1} .
2. **a.** Vérifier que $u_3 = 2009^{250} - 1$ puis en déduire que $2009^{250} \equiv 1 \pmod{625}$.
b. Démontrer alors que $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{625}$.

Partie C

1. En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que $2009^{8001} - 2009$ est divisible par 10 000.
2. Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009.