

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation (E) : $7x - 6y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation (E)
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation :

$$7^n - 3 \times 2^m = 1 \quad (\text{F}).$$

1. On suppose $m \leq 4$.
Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.
2. On suppose maintenant que $m \geq 5$.
 - a. Montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod{32}$.
 - b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.
 - c. En déduire que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod{5}$.
 - d. Pour $m \geq 5$, existe-t-il des couples (n, m) d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?
3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).