

Partie B : étude d'un code correcteur, le code de Hamming (7, 4)

On rappelle qu'un **bit** est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1.

On considère un « mot » formé de 4 bits que l'on note b_1, b_2, b_3 et b_4 .

Par exemple, pour le mot « 1101 », on a $b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 0$ et $b_4 = 1$.

On ajoute à cette liste une *clé de contrôle* $c_1 c_2 c_3$ formée de trois bits :

- c_1 est le reste de la division euclidienne de $b_2 + b_3 + b_4$ par 2 ;
- c_2 est le reste de la division euclidienne de $b_1 + b_3 + b_4$ par 2 ;
- c_3 est le reste de la division euclidienne de $b_1 + b_2 + b_4$ par 2.

On appelle alors « message » la suite de 7 bits formée des 4 bits du mot et des 3 bits de contrôle.

1. Préliminaires

- a. Justifier que c_1, c_2 et c_3 ne peuvent prendre comme valeurs que 0 ou 1.
- b. Calculer la clé de contrôle associée au mot 1001.

2. Soit $b_1 b_2 b_3 b_4$ un mot de 4 bits et $c_1 c_2 c_3$ la clé associée.

Démontrer que si on change la valeur de b_1 et que l'on recalcule la clé, alors :

- la valeur de c_1 est inchangée ;
- la valeur de c_2 est modifiée ;
- la valeur de c_3 est modifiée.

3. On suppose que, durant la transmission du message, au plus un des 7 bits a été transmis de façon erronée. À partir des quatre premiers bits du message reçu, on recalcule les 3 bits de contrôle, et on les compare avec les bits de contrôle reçus.

Sans justification, recopier et compléter le tableau ci-dessous. La lettre *F* signifie que le bit de contrôle reçu ne correspond pas au bit de contrôle calculé, et *J* que ces deux bits sont égaux.

Bit de contrôle calculé \ Bit erroné	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	Aucun
c_1	<i>J</i>							
c_2	<i>F</i>							
c_3	<i>F</i>							

4. Justifier rapidement, en vous appuyant sur le tableau, que si un seul bit reçu est erroné, on peut dans tous les cas déterminer lequel, et corriger l'erreur.
5. Voici deux messages de 7 bits :

$$A = 0100010 \quad \text{et} \quad B = 1101001.$$

On admet que chacun d'eux comporte au plus une erreur de transmission. Dire s'ils comportent une erreur, et la corriger le cas échéant.