On considère la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = 2u_n + 6.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 9 \times 2^n - 6.$$

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, u_n est divisible par 6.

   On définit la suite d'entiers (v_n) par, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{u_n}{6}$.

3. On considère l'affirmation : « pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier ».

   Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

4. **a.** Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1} - 2v_n = 1$.

   b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.

   c. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, le PGCD de u_n et u_{n+1}.

5. **a.** Vérifier que $2^4 \equiv 1$ [5].

   b. En déduire que si n est de la forme $4k + 2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.

   c. Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n?

   Justifier.