Les parties A et B sont indépendantes.

Une personne a mis au point le procédé de cryptage suivant :

— À chaque lettre de l'alphabet, on associe un entier n comme indiqué ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

— On choisit deux entiers a et b compris entre 0 et 25.

— Tout nombre entier n compris entre 0 et 25 est codé par le reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26.

Le tableau suivant donne les fréquences f en pourcentage des lettres utilisées dans un texte écrit en français.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Fréquence	9,42	1,02	2,64	3,38	15,87	0,94	1,04	0,77	8?41	0,89	0,00	5,33	3,23
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Fréquence	7,14	5,13	2,86	1,06	6,46	7,90	7,26	6,24	2,15	0,00	0,30	0,24	0,32

Partie A

Un texte écrit en français et suffisamment long a été codé selon ce procédé. L'analyse fréquentielle du texte codé a montré qu'il contient 15,9 % de O et 9,4 % de E.

On souhaite déterminer les nombres a et b qui ont permis le codage.

1. Quelles lettres ont été codées par les lettres O et E?
2. Montrer que les entiers a et b sont solutions du système

$$\begin{cases} 4a + b \equiv 14\ [26] \\ b \equiv 4\ [26]. \end{cases}$$

3. Déterminer tous les couples d'entiers $(a\ ,\ b)$ ayant pu permettre le codage de ce texte.

Partie B

1. On choisit $a = 22$ et $b = 4$.

   a. Coder les lettres K et X.

   b. Ce codage est-il envisageable?

2. On choisit $a = 9$ et $b = 4$.

   a. Montrer que pour tous entiers naturels n et m, on a :

$$m \equiv 9n + 4\ [26] \iff n \equiv 3m + 14\ [26]$$

   h) Décoder le mot AQ.