

Un numéro de carte bancaire est de la forme :

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} c$$

où a_1, a_2, \dots, a_{15} et c sont des chiffres compris entre 0 et 9.

Les quinze premiers chiffres contiennent des informations sur le type de carte, la banque et le numéro de compte bancaire.

c est la clé de validation du numéro. Ce chiffre est calculé à partir des quinze autres.

L'algorithme suivant permet de valider la conformité d'un numéro de carte donné.

Initialisation : I prend la valeur 0
 | P prend la valeur 0
 | R prend la valeur 0

Traitement : Pour k allant de 0 à 7 :
 R prend la valeur du reste de la division euclidienne de $2a_{2k+1}$ par 9
 I prend la valeur $I + R$
 Fin Pour
 Pour k allant de 1 à 7 :
 | P prend la valeur $P + a_{2k}$
 Fin Pour
 S prend la valeur $I + P + c$

Sortie : Si S est un multiple de 10 alors :
 | Afficher « Le numéro de la carte est correct. »
 Sinon :
 | Afficher « Le numéro de la carte n'est pas correct. »
 Fin Si

1. On considère le numéro de carte suivant : 5635 4002 9561 3411.
 - a. Compléter le tableau en annexe permettant d'obtenir la valeur finale de la variable I .
 - b. Justifier que le numéro de la carte 5635 4002 9561 3411 est correct.
 - c. On modifie le numéro de cette carte en changeant les deux premiers chiffres. Le premier chiffre (initialement 5) est changé en 6.
 Quel doit être le deuxième chiffre a pour que le numéro de carte obtenu $6a35 4002 9561 3411$ reste correct ?
2. On connaît les quinze premiers chiffres du numéro d'une carte bancaire.
 Montrer qu'il existe une clé c rendant ce numéro de carte correct et que cette clé est unique.
3. Un numéro de carte dont les chiffres sont tous égaux peut-il être correct ? Si oui, donner tous les numéros de carte possibles de ce type.
4. On effectue le test suivant : on intervertit deux chiffres consécutifs distincts dans un numéro de carte correct et on vérifie si le numéro obtenu reste correct.
 On a trouvé une situation où ce n'est pas le cas, l'un des deux chiffres permutés valant 1.
 Peut-on déterminer l'autre chiffre permuté ?