Les nombres de la forme $2^n - 1$ où n est un entier naturel non nul sont appelés **nombres de Mersenne**.

1. On désigne par a, b et c trois entiers naturels non nuls tels que PGCD$(b\,;\,c) = 1$.
   Prouver, à l'aide du théorème de Gauss, que :

   si b divise a et c divise a alors le produit bc divise a.

2. On considère le nombre de Mersenne $2^{33} - 1$.
   Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats ci-dessous.

$\left(2^{33}-1\right) \div 3$	2863311530
$\left(2^{33}-1\right) \div 4$	2147483648
$\left(2^{33}-1\right) \div 12$	715827882,6

   Il affirme que 3 divise $\left(2^{33}-1\right)$ et 4 divise $\left(2^{33}-1\right)$ et 12 ne divise pas $\left(2^{33}-1\right)$.

   a. En quoi cette affirmation contredit-elle le résultat démontré à la question **1.** ?

   b. Justifier que, en réalité, 4 ne divise pas $\left(2^{33}-1\right)$.

   c. En remarquant que $2 \equiv -1 \quad [3]$, montrer que, en réalité, 3 ne divise pas $2^{33} - 1$.

   d. Calculer la somme $S = 1 + 2^3 + \left(2^3\right)^2 + \left(2^3\right)^3 + \cdots + \left(2^3\right)^{10}$.

   e. En déduire que 7 divise $2^{33} - 1$.

3. On considère le nombre de Mersenne $2^7 - 1$. Est-il premier ? Justifier.

4. On donne l'algorithme suivant où MOD$(N,\ k)$ représente le reste de la division euclidienne de N par k.

Variables :	n entier naturel supérieur ou égal à 3
	k entier naturel supérieur ou égal à 2
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
	Affecter à k la valeur 2.
Traitement :	Tant que MOD$(2^n - 1,\ k) \neq 0$ et $k \leqslant \sqrt{2^n - 1}$
	Affecter à k la valeur $k + 1$
	Fin de Tant que.
Sortie :	**Afficher** k.
	Si $k > \sqrt{2^n - 1}$
	Afficher « CAS 1 »
	Sinon
	Afficher « CAS 2 »
	Fin de Si

   a. Qu'affiche cet algorithme si on saisit $n = 33$? Et si on saisit $n = 7$?

   b. Que représente le CAS 2 pour le nombre de Mersenne étudié ? Que représente alors le nombre k affiché pour le nombre de Mersenne étudié ?

   c. Que représente le CAS 1 pour le nombre de Mersenne étudié ?