

EXERCICE 23

Soit n un entier.

- 1) Démontrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 4 vaut 0 ou 1. (Indication : distinguer les cas n pair et n impair).
- 2) a) Existe-t-il des entiers a et b tels que $a^2 + b^2 = 10147$?
b) Existe-t-il des entiers a et b tels que $a^2 + b^2 = 10145$?

EXERCICE 24

Le nombre n désigne un entier naturel.

- 1) a) Montrer que $3n^2 + 15n + 17 = (n+1)(3n+12) + 5$.
b) En déduire, suivant les valeurs de n , le reste de la division euclidienne de $3n^2 + 15n + 17$ par $n+1$.
c) En déduire les valeurs de n pour lesquelles $n+1$ divise $3n^2 + 15n + 17$.
- 2) Montrer que $n^2 + 3n + 2$ est divisible par $n+1$ pour tout entier naturel n .
- 3) Déduire de ce qui précède que, quel que soit n , $3n^2 + 15n + 17$ n'est pas divisible par $n^2 + 3n + 2$.

EXERCICE 27

Soit x et y deux entiers relatifs tels que : $x \equiv 2 \pmod{5}$ et $y \equiv 3 \pmod{5}$.

Déterminer le reste de la division euclidienne par 5 de chacun des nombres suivants :

- a) $5x^2 + 2y^2$; b) $3x - 4y$; c) $2x^3 - y^2$

EXERCICE 28

Dans cet exercice, utiliser les congruences.

- 1) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.
- 2) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 5 \mid 3^{3n+2} + 2^{n+4}$.

EXERCICE 29

- 1) En utilisant les congruences modulo 7, étudier, suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste dans la division euclidienne par 7 du nombre : $A = n^2 - n + 1$.
- 2) En déduire les entiers naturels n tels que le nombre A soit divisible par 7.
- 3) Déterminer le reste de la division par 7 du nombre : $B = 2753^2 - 2753 + 1$.

EXERCICE 30

- 1) Construire la table de multiplication par 3 modulo 8.
- 2) En déduire l'ensemble des entiers x tels que : $3x \equiv 7 \pmod{8}$

EXERCICE 32

Soit a et b deux entiers relatifs.

Démontrer que : si $7 \mid a^2 + b^2$, alors $7 \mid a$ et $7 \mid b$.

EXERCICE 33

Le but de cet exercice est de démontrer que le nombre $\sqrt{3}$ est irrationnel.

- 1) Soit a un entier naturel. En raisonnant modulo 5, déterminer les restes possibles de la division euclidienne de a^2 par 5.
- 2) Soit b un entier naturel. En raisonnant modulo 5, déterminer les restes possibles de la division euclidienne de $3b^2$ par 5.
- 3) Montrer qu'il n'est pas possible d'écrire le nombre $\sqrt{3}$ sous la forme d'une fraction irréductible :
 $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^*$).