TS **APPROFONDISSEMENT** feuille 7

EXERCICE 1

Le but de l' exercice est de déterminer les fonctions continue sur $\boldsymbol{R}$ telle que

Pour tous réel x et y , f(x + y) = f(x) + f(y)

1) déterminer f(0)

2) on pose a = f(0) , montrer que pour tout entier naturel n , f(n) = an

3) montrer que pour tout entier relatif k , f(k) = ak

4) soit x = $\frac{p}{q}$ un rationnel (avec p et q entier relatif et q non nul)

Montrer que f(x) = ax

5) on admet que $\boldsymbol{Q}$ est dense dans $\boldsymbol{R}$, c' est à dire que pour tous réels α et β

Tels que $\alpha < \beta$ il existe existe un rationnel c tel que $\alpha < c < \beta$

Soit x un réel non rationnel

Construire une suite de rationnels u_n qui converge vers x et montrer

Que f(x) = ax

6) conclure

EXERCICE 2

Soit f une fonction continue de [0 ; 1] dans [0 ; 1]

Montrer qu' il existe un réel c de [0 ; 1] tel que f(c) = c