TS **APPROFONDISSEMENT** feuille 6

EXERCICE 1

On admet les résultats suivants : - toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément

- ($\mathbb{Z}$, +) est un groupe commutatif

1) soit n un entier naturel non nul , $n\mathbb{Z}$ est l' ensemble des entiers relatifs de la forme kn Avec k entier relatif , montrer que ($n\mathbb{Z}$, +) est un sous-groupe de ($\mathbb{Z}$, +)

2) Soit (G , +) un sous-groupe de ($\mathbb{Z}$, +) non réduit à 0 , montrer qu' il existe un entier naturel non nul n tel que G = $n\mathbb{Z}$

3) soient n et p deux entiers naturels non nuls , $n\mathbb{Z} + p\mathbb{Z}$ est l' ensemble des entiers Relatifs de le forme a = kn + k'p avec k et k' entiers relatifs

Montrer que $n\mathbb{Z} + p\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de ($\mathbb{Z}$, +)

Soit d l' entier naturel non nul tel que $n\mathbb{Z} + p\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$

Montrer que d est le PGCD de n et p

4) soient n et p deux entiers naturels non nuls , montrer que $n\mathbb{Z} \cap p\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de ($\mathbb{Z}$, +)

Soit m l' entier naturel non nul tel que $n\mathbb{Z} \cap p\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$

Montrer que m est le PPCM de n et p