PRELEMINAIRE

On rappelle la définition de la convergence d' une suite :

La suite (u_n) converge vers l ssi ∀ ε > 0 , ∃ n_0 ∈ ***N*** tel que

n ≥ n_0 ⇒ $|u_n - l| \leq \varepsilon$

et la définition de la continuité de f en a :

f est continue en a ssi ∀ ε > 0 , ∃ α > 0 tel que ∀ x ∈ Df :

$|x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

Démontrer que si une suite (u_n) converge vers l et si f est continue en l

Alors f(u_n) converge vers f(l)

EXERCICE 1

Soit f une application de ***R*** dans ***R*** , continue en 0 et telle que :

∀ x ∈ ***R*** f(2x) = f(x) Montrer que f est constante

Indication : soit x_0 un réel fixé , montrer que pour tout entier naturel n

On a : $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = f(x_0)$

EXERCICE 2

On note , pour n ∈ $\boldsymbol{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ $u_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$ $v_n = S_n - 2\sqrt{n}$

a) Montrer que ∀ n ∈ $\boldsymbol{N}^*$, $S_n \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$

b) Montrer que ∀ n ∈ $\boldsymbol{N}^*$ $2\sqrt{n+1} - 2 \leq$, S_n

c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent